



PAUTA CONTROL # 1

- P1.** a) 1) Cada pasajero puede bajarse en m posibles paradas. Como hay n pasajeros distinguibles, la cantidad buscada es m^n .
- 2) Como los pasajeros son indistinguibles, el problema es equivalente a repartir n bolitas indistinguibles en m urnas distinguibles, lo cual sabemos que puede realizarse de $\binom{n+m-1}{m-1}$ maneras.
- 3) Primero, obligamos que n_i pasajeros bajen en la parada i , para cada $i = 1, \dots, m$; como son los pasajeros son indistinguibles, sólo hay una forma de hacerlo. Segundo, se reparten los $n - \sum n_i$ pasajeros restantes de manera arbitraria en las m estaciones, lo cual, haciendo nuevamente la analogía con bolitas y urnas, puede hacerse de

$$\binom{n - \sum n_i + m - 1}{m - 1}$$

maneras distintas.

- b) 1) Para que el bicho llegue al punto (m, n) partiendo de $(0, 0)$, debe dar $m + n$ pasos, de los cuales exactamente m deben ser en sentido horizontal y el resto vertical. Luego, la cantidad de recorridos corresponde a la cantidad de formas de escoger m pasos horizontales entre los $m + n$, es decir, $\binom{m+n}{m}$.
- 2) Repitiendo el razonamiento previo, se tiene que hay $\binom{i+j}{i}$ recorridos desde $(0, 0)$ a (i, j) . Del mismo modo, para ir desde (i, j) a (m, n) deben darse $m - i + n - j$ pasos, de los cuales $m - i$ deben ser horizontales, lo cual puede hacerse de $\binom{m-i+n-j}{m-i}$ formas. Por lo tanto, la cantidad de caminos que pasan por (i, j) es el producto de ambas cantidades, es decir $\binom{i+j}{i} \binom{m-i+n-j}{m-i}$.

- P2.** a) 1) Sean los eventos

M : el hijo es mujer

H : el hijo es hombre

\tilde{M} : la ecografía predice que el hijo es mujer

\tilde{H} : la ecografía predice que el hijo es hombre.

La probabilidad buscada corresponde a la probabilidad de que sea mujer, dado que la ecografía así lo predijo, es decir $\mathbb{P}(M|\tilde{M})$. Por regla de Bayes, tenemos:

$$\mathbb{P}(M|\tilde{M}) = \frac{\mathbb{P}(\tilde{M}|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\tilde{M})} = \frac{\frac{90}{100} \cdot \frac{50}{100}}{\mathbb{P}(\tilde{M})}.$$

Por regla de probabilidades totales, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{M}) &= \mathbb{P}(\tilde{M}|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(\tilde{M}|M^c)\mathbb{P}(M^c) \\ &= \mathbb{P}(\tilde{M}|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(\tilde{M}|H)\mathbb{P}(H) \\ &= \frac{90}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{50}{100}.\end{aligned}$$

Luego, la probabilidad buscada es:

$$\mathbb{P}(M|\tilde{M}) = \frac{\frac{90}{100} \cdot \frac{50}{100}}{\frac{90}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{50}{100}} = \frac{90}{91}.$$

- 2) El evento en que la ecografía se equivoca corresponde a que se predice hombre cuando en realidad es mujer, o bien si predice mujer cuando en realidad es hombre. Es decir, es el evento $\tilde{H}M \cup \tilde{M}H$. Como la unión es disjunta, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{H}M \cup \tilde{M}H) &= \mathbb{P}(\tilde{H}M) + \mathbb{P}(\tilde{M}H) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\tilde{H}M)}{\mathbb{P}(M)}\mathbb{P}(M) + \frac{\mathbb{P}(\tilde{M}H)}{\mathbb{P}(H)}\mathbb{P}(H) \\ &= \mathbb{P}(\tilde{H}|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(\tilde{M}|H)\mathbb{P}(H) \\ &= \frac{10}{100} \frac{50}{100} + \frac{1}{100} \frac{50}{100} \\ &= 5,5 \, \%.\end{aligned}$$

- b) Para ver si C_1 y C_2 son independientes hay que verificar si se cumple la igualdad $\mathbb{P}(C_1C_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2)$. Llamemos E al evento en que se escoge la moneda equilibrada. Por regla de probabilidades totales, tenemos:

$$\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_1|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(C_1|E^c)\mathbb{P}(E^c) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

Lo mismo se tiene para $\mathbb{P}(C_2)$, por lo tanto $\mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2) = \frac{49}{144}$. Por otro lado:

$$\mathbb{P}(C_1C_2) = \mathbb{P}(C_1C_2|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(C_1C_2|E^c)\mathbb{P}(E^c) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{2} = \frac{50}{144} \neq \frac{49}{144}.$$

Luego, C_1 y C_2 no son independientes. Esto se debe a que el hecho que se obtenga cara en un lanzamiento es un indicio que la moneda escogida corresponde a la moneda cargada, lo que provee cierta información acerca del resultado del otro lanzamiento.

- P3.** a) El rango de X es el conjunto $\{2, \dots, n+1\}$, pues se necesitan al menos 2 lanzamientos para que ocurra una repetición, y a lo más se realizan $n+1$, pues en el lanzamiento $n+1$ necesariamente se repite alguna de las n caras. Calculemos $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$: para que $X = k$ debe tenerse que los primeros $k-1$ lanzamientos tuvieron resultados distintos, y el lanzamiento k fue alguno de los anteriores. Es decir:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\overbrace{n(n-1) \cdots (n-(k-2))}^{k-1 \text{ primeros}} \overbrace{(k-1)}^{k\text{-ésimo}}}{\underbrace{n^k}_{\text{casos totales}}}.$$

- b) 1) Para calcular c usamos que la integral de la densidad en todo \mathbb{R} debe valer 1:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{10}^{\infty} \frac{c}{x^2} dx = \left. \frac{-c}{x} \right|_{10}^{\infty} = \frac{c}{10}.$$

Despejando, obtenemos $c = 10$.

- 2) La probabilidad buscada corresponde a la probabilidad de que la variable X sea mayor que 20, es decir:

$$\mathbb{P}(X > 20) = \mathbb{P}(X \in (20, \infty)) = \int_{20}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{20}^{\infty} \frac{10}{x^2} dx = \left. \frac{-10}{x} \right|_{20}^{\infty} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

- 3) Calculemos:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 10 \\ \int_{10}^x \frac{10}{y^2} dy = 1 - \frac{10}{x} & \text{si } x > 10. \end{cases}$$